第 3 节 不等式的三角换元方法（★★★）

强化训练

1.（2022 • 黑龙江牡丹江模拟 • ★★）若 $x^2+y^2=1$，则 $3x-4y$ 的最大值是_____.

答案：5

解析：所给等式涉及两项平方和，可考虑三角换元，

由题意，可设 $\begin{cases}x=\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$，则 $3x-4y=3\cos\theta-4\sin\theta$

$=5(-\frac{4}{5}\sin\theta+\frac{3}{5}\cos\theta)=5\sin(\theta+\varphi)$，

其中辅助角 φ 满足 $\cos\varphi=-\frac{4}{5}$，$\sin\varphi=\frac{3}{5}$，

所以当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，$3x-4y$ 取得最大值 5.

2.（2023 • 全国乙卷 • ★★★）已知实数 x，y 满足 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$，则 $x-y$ 的最大值是（　　）

（A）$1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$　（B）4　（C）$1+3\sqrt{2}$　（D）7

答案：C

解析：所给等式可配方化为平方和结构，故考虑三角换元，

$x^2+y^2-4x-2y-4=0\Rightarrow(x-2)^2+(y-1)^2=9$，

令 $\begin{cases}x=2+3\cos\theta\\y=1+3\sin\theta\end{cases}$，则 $x-y=2+3\cos\theta-1-3\sin\theta$

$=1-3\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$，$\theta\in\mathbf{R}$，

所以当 $\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=-1$ 时，$x-y$ 取得最大值 $1+3\sqrt{2}$.

3.（2022 • 新高考 II 卷 • ★★★★）（多选）若实数 x，y 满足 $x^2+y^2-xy=1$，则（　　）

（A）$x+y\le1$　（B）$x+y\ge-2$　（C）$x^2+y^2\ge1$　（D）$x^2+y^2\le2$

答案：BD

解法 1：所给等式中有 x^2，y^2，xy，可尝试将其配方，转化为平方和结构，用三角换元处理，

由 $x^2+y^2-xy=1$ 可得 $(x-\frac{y}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2}y)^2=1$，所以可设 $\begin{cases}x-\frac{y}{2}=\cos\theta\\\frac{\sqrt{3}}{2}y=\sin\theta\end{cases}$，则 $\begin{cases}x=\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\\y=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\end{cases}$，

所以 $x+y=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin(\theta+\frac{\pi}{6})$，从而 $-2\le x+y\le 2$，故 A 项错误，B 项正确；

$$x^2+y^2=(\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta)^2+(\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta)^2=\cos^2\theta+\frac{1}{3}\sin^2\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta+\frac{4}{3}\sin^2\theta$$

$$=1+\frac{2}{3}\sin^2\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta=1+\frac{1-\cos 2\theta}{3}+\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\sin(2\theta-\frac{\pi}{6}),$$

因为 $-1\le\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})\le 1$，所以 $\frac{2}{3}\le x^2+y^2\le 2$，故 C 项错误，D 项正确.

解法 2：A、B 两项判断的是与 $x+y$ 有关的不等式，可由已知的等式凑出这一结构，先配方，

由题意，$1=x^2+y^2-xy=(x+y)^2-3xy$，观察发现只需用 $xy\le(\frac{x+y}{2})^2$ 即可将结构统一成 $x+y$，

所以 $1=(x+y)^2-3xy\ge(x+y)^2-3(\frac{x+y}{2})^2=\frac{(x+y)^2}{4}$，从而 $-2\le x+y\le 2$，

当且仅当 $x=y$ 时取等号，结合 $x^2+y^2-xy=1$ 可得 $x=y=-1$ 或 $x=y=1$，

它们分别对应上述左、右两侧的取等条件，所以 $x+y$ 的取值范围是 $[-2,2]$，故 A 项错误，B 项正确；

C、D 两项与 x^2+y^2 有关，还是考虑统一结构，要把 xy 变成 x^2+y^2，可用 $-\frac{x^2+y^2}{2}\le xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$ 来实现，

一方面，$xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $1=x^2+y^2-xy\ge x^2+y^2-\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{x^2+y^2}{2}$，故 $x^2+y^2\le 2$，

取等条件是 $x=y$，结合 $x^2+y^2-xy=1$ 可得此时 $x=y=1$ 或 $x=y=-1$；

另一方面，$xy\ge-\frac{x^2+y^2}{2}$，所以 $1=x^2+y^2-xy\le x^2+y^2+\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{3}{2}(x^2+y^2)$，故 $x^2+y^2\ge\frac{2}{3}$，

取等条件是 $y=-x$，结合 $x^2+y^2-xy=1$ 可得此时 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\\y=-\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}\\y=\frac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$；

所以 x^2+y^2 的取值范围是 $[\frac{2}{3},2]$，故 C 项错误，D 项正确.

【反思】①这是当年的选择压轴题，通过此题我们发现若给出 x，y 的二次齐次等式，可考虑通过配方化为平方和结构，再三角换元；②上述解法 2 用到了统一结构的思想，也是常规方法，其中用到的不等式 $-\frac{x^2+y^2}{2}\le xy\le\frac{x^2+y^2}{2}$ 源于 $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，将 a 换成 x^2，b 换成 y^2 可得 $\frac{x^2+y^2}{2}\ge\sqrt{x^2y^2}=|xy|$，去掉绝对值即得该不等式.